麗水大學校 環境硏究論文集 第1卷
Journal of Environmental Research Institute
Yosu National University Vol. 1, pp. 47~55, 1998

# 대기경계층 난류유동의 Large Eddy Simulation 해석기법의 알고리즘에 관한 연구

조창주* · 서성규** · 박종혁*

* 전남대학교 환경연구소
** 여수대학교 환경공학과

# A Study on the Algorithm of Large Eddy Simulation Technique of PBL Turbulence

Chang-Joo Cho*, Seong-Gyu Seo**, Jong-Hyuk Park*

* *Environmental Research Center, Chonnam National University*
** *Dept. of Environmental Engineering, Yosu National University*

## ABSTRACT

LES(Large eddy simulation) is an intermediate technique between the direct simulation of turbulent flows and the solution of the Reynold-averaged equations. The method is initiated by the introduction of a filtering operation which seperates the large-scale and small-scale structures. The large scales are computed explicitly, whereas the small scales necessarily are modeled.

In this study, a LES model used three-dimensional incompressible Navier-Stokes equation is calculated for the numerical simulation of turbulent flow in the PBL. Instantaneous and detailed flow of velocity component was obtained with LES and horizontal mean vertical profile of potential temperature was indicated typical profile in the PBL.

**Key Words :** Large Eddy Simulation, Filtering Operation, Large-scale and Small-scale Structures, Planetary Boundary Layer

## 1. 서 론

대기경계층(planetary boundary layer; PBL)은 대부분 난류의 형태인데 이 대기난류의 해석에는 실측에 의한 방법, 엄밀해를 구하는 방법과 수치 simulation에 의한 근사해를 구하는 방법이 있다.

난류는 자체에 포함되어 있는 복잡한 물리적 과정때문에 모델을 엄밀해를 수학적으로 구하기 어렵고, 관측에 의해 해를 구하는 방법은 거대한 양의 데이터를 필요로 하지만 때론 실측데이터를 얻는일 자체가 어렵기 때문에 수치 simulation에 의한 근사해석이 주를 이루고 있다.

대기난류의 근사해석은 Navier-Stokes 방정식에 의해 주로 해석되며, 이 방정식은 유체를 연속체로 취급하고 Newton의 제 2법칙을 적용하여 유도되며 유체유동을 지배하는 가장 근본적인 방정식이다. 그러나 유체의 비선형성 때문에 엄밀해는 극히 제한된 영역에서만 가능하였으나, 최근 일련의 수치해석법의 발전으로 근사해가 가능하게 되었다. 또한 고속컴퓨터의 출현으로 더욱 정확하고 많은 난류유동의 해석이 가능하게 되었으며, 많이 사용되는 수치해석은 RANS(Reynolds averaged Navier-Stokes) 방정식을 이용한 해석기법이다. 하지만 이 기법은 형상이 다른 난류유동들에서의 큰 유동구조를 보편적으로 모델하기에는 어려운 문제점을 가지고 있다. 이론적으로 가장 이상적인 해석기법은 DNS(Direct numerical simulation)로 알려져 있는데[1], DNS는 난류모형을 사용하지 않고 비정상 Navier-Stokes방정식의 수치해를 구하는 기법이다. 해석 error는 단지 사용한 수치해석 error에 의한 것이고 적절한 조절에 의하여 error를 줄일 수 있다. 그러나 이 방법으로 난류유동의 모든 범위를 해석하기 위해서는 대략 $Re^{9/4}$(Re: Reynolds 수)만큼의 격자점이 필요하여 계산시간이 많이 소요되는 단점을 가지고 있다.

LES(Large eddy simulation)은 RANS와 DNS의 중간단계의 해석기법으로 1970년대 기상학자들에 의해 기상현상을 예측하는데 사용되었으며 Deardorff[2]에 의해 대기경계층에 적용되었다. 대기권에서는 가장 작은 난류의 크기가 cm이기 때문에 대기의 상세한 모든 것을 기대할 수 없었으나, 컴퓨터의 발전과 더불어 활발한 연구가 진행되고 있는 해석기법으로 Ferziger[3], Moeng[4], Mason[5], Schmidt와 Schumann[6] 등에 의하여 대기의 난류유동에 대한 활발한 연구가 진행되고 있다.

본 논문에서는 난류유동의 해석기법의 하나인 LES의 해석기법의 알고리즘을 소개하고 모델링과 수치해석을 통하여 대기의 유동을 살펴보았다.

## 2. 수식전개 및 모델링

### 2.1. 여과작업

LES는 공간적인 여과작업을 통하여 흐름을 격자로 나타낼 수 있는 성분(large scale)과 그 이하의 작은 성분(small scale)을 분리하여, 전자는 직접계산으로 후자는 모델화작업에 의해 해석하는 방법이다. 또한 격자가 충분히 작은 것이라면 격자 이하의 난류흐름구조는 등방적(isotropic)으로 보이는 경우가 많고 보편적인 모델을 구성하기 쉬운 특성을 가지고 있으며 비정상류에의 응용도 가능한 특징을 가지고 있다.

난류해석의 압축성은 Boussinesq 근사로 해석하면, 3차원 비압축성 Navier-Stokes (N-S) 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}u_iu_j=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \qquad (1)$$

여과작업(filtering operation)은 난류에서 발생하는 많은 와류중에서 작은 크기의 것을 모델링하기 위하여 수행된다. 해석하는 함수를 overbar로 정의하면 large scale영역은 다음 식으로 표시할 수 있다[7].

$$\overline{f}(x) = \int_D G(x-x')f(x')dx' \qquad (2)$$

여기서, G(x-x')는 filter function, D는 해석영역이고 이것은 small scale의 크기와 구조로 결정된다. Homogeneous한 영역에서 보편적으로 사용되는 filter function은 GF(Gaussian filter)와 CF(Cutoff filter)인데 이를 수식으로 나타내면 각각 다음과 같다.

$$G(x-x')=\sqrt{\frac{6}{\pi\triangle^2}}\exp\left(-\frac{6(x-x')^2}{\triangle^2}\right) \qquad (3)$$

$$G(x-x')=\frac{2\sin[\pi(x-x')/\triangle]}{\pi(x-x')} \qquad (4)$$

Gaussian filter는 여과과정에서 가중치는 다르지만 모든 파동이 관여되는 형태의 filter이며, cutoff filter는 단지 특정범위의 파동만이 관여되는 filter이다. 비균질한 영역에서 사용되는 filter function은 TF(Tophat filter)인데 격자내에서 평균하는 효과를 가진다.

$$G(x-x') = \begin{cases} 1 & |x_i - x_i'| < \triangle/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5}$$

Fig. 1은 이들 filter함수의 물리적영역에서의 모양을 나타내고 있으며 Fig. 2는 물리영역에서 이들 filter들의 관계를 나타내고 있다.

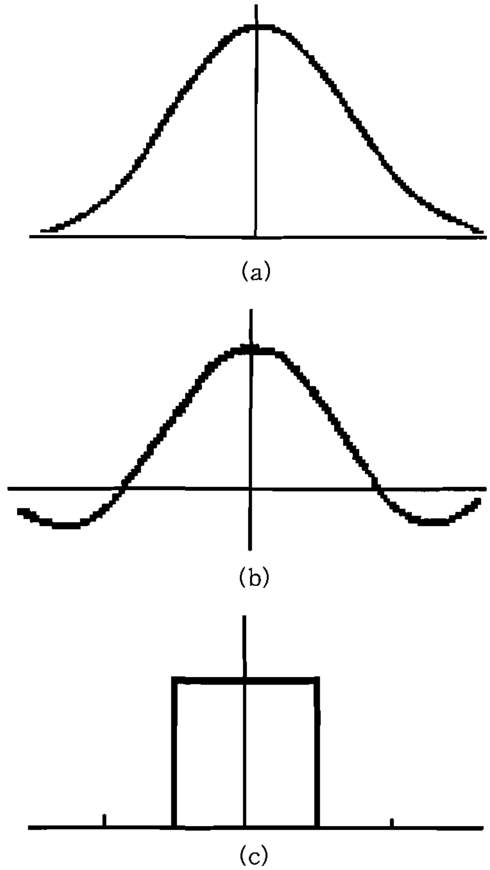



Fig. 1. Typical filter functions.
(a) Gaussian Filter (b) Cutoff Filter
(c) Tophat Filter

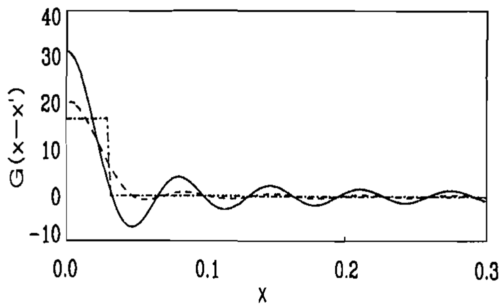



Fig. 2. Relation of various filters[8]; GF(---), CF(—), TF(-·-·).

이와 같은 여과작업을 통하여 식(1)은 다음과 같이 나타내어 진다.

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i u_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_i^2} \tag{6}$$

같은 방법으로 온위방정식(potential temperature equation)에 대하여는

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\theta u_i} = \nu \frac{\partial^2 \overline{\theta}}{\partial x_i^2} \tag{7}$$

과 같이 나타낼 수 있다.

## 2.2. 소격자모델링(Subgrid scale modeling)

여과된 N-S방정식으로 난류계산을 하는 경우에는 대류항인 $\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i u_j}$의 해석이 문제가 되는데 이를 전개하면 다음과 같다.

난류의 속도는 다음과 같이 평균( ¯ )과 변동성분( ′ )으로 나눌 수 있다.

$$u = \overline{u} + u' \tag{8}$$

$$\begin{aligned} u_i u_j &= (\overline{u_i} + u_i')(\overline{u_j} + u_j') \\ &= \overline{u_i u_j} + \overline{u_i} u_j' + u_i' \overline{u_j} + u_i' u_j' \end{aligned} \tag{9}$$

따라서,

$$\overline{u_i u_j} = \overline{\overline{u}_i \overline{u}_j} + L_{ij} + C_{ij} + R_{ij} \tag{10}$$

$$L_{ij} = \overline{\overline{u}_i \overline{u}_j} - \overline{u}_i \overline{u}_j \quad : \text{ Leonard stress} \tag{11}$$

$$C_{ij} = \overline{\overline{u}_i u_j'} + \overline{u_i' \overline{u}_j} \quad : \text{ Cross term} \tag{12}$$

$$R_{ij} = \overline{u_i' u_j'} \quad : \text{ SGS Reynolds stress} \tag{13}$$

과 같이 전개할 수 있다. 식(10)에서 $C_{ij}$, $R_{ij}$은 소격자크기의 속도성분( $u'$ )을 가지고 있어 직접 계산할 수 없으므로 모델링에 의해 취급되어야 한다.

따라서 N-S 방정식 및 온위방정식은 다음과 같은 형태로 놓을 수 있다.

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u}_i \overline{u}_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_i^2} \tag{14}$$

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\theta}\overline{u}_i) = -\frac{\partial \tau_{\theta i}}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \overline{\theta}}{\partial x_i^2} \tag{15}$$

여기서, $\tau_{ij}$, $\tau_{\theta i}$는 운동량과 열의 SGS 응력을 나타내며 다음과 같이 정의된다.

$$\tau_{ij} = Q_{ij} - \frac{1}{3} Q_{kk}\delta_{ij} \tag{16}$$

$$Q_{ij} = C_{ij} + R_{ij} \tag{17}$$

$$P = \frac{\overline{p}}{\rho} + \frac{1}{3} Q_{kk} \tag{18}$$

여기서, $\delta_{ij}$는 Kronecker delta, 즉,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = i \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{19}$$

이며, filtering 과정에서 생성된 $\tau_{ij}$, $\tau_{\theta i}$을 모델링하는 것을 SGS modeling이라 한다.

SGS model에는 아래와 같은 Smagorinsky[9]의 와류점성모델이 있는데, 응력 $\tau_{ij}$은 변형율텐서인 $\overline{S}$와 관계가 있는 것으로 가정된다.

$$\tau_{ij} = -2\nu_T \overline{S}_{ij} \tag{20}$$

$$\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) \tag{21}$$

여기서, $\nu_T$는 와점성(eddy viscosity)계수이며 계산시간을 절약하고 방정식의 해를 풀어야 하는 번거로움을 피하기 위하여 대수적으로 얻는데 소격자는 등방성이고 균질하기 때문에 대수적 모델은 와점성을 정확하게 설명할 수 있다[8].

$$\nu_T = l^2\sqrt{2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}} \tag{22}$$

여기서 $l$은 길이스케일이다.

Germano등[10]은 dynamic eddy viscosity model을 소개하였는데 이 모델은 grid filter('$^-$'로 표시)와 test filter('$^\wedge$'로 표시)의 두가지 여과함수를 사용하여 수치해석이 진행됨에 따라 동적으로 모델계수를 결정하는 방법이다. test filter의 크기( $\widehat{\Delta}$ )는 grid filter 크기( $\overline{\Delta}$ )보다 크며 grid filter가 N-S 방정식에 의존할 때 SGS 응력이 $\tau_{ij}$이면 비슷한 방법으로, test filter의 subtest scale 응력은 $T_{ij}$로 표현되며 해석영역의 난류응력 $L_{ij} \equiv \widehat{\overline{u}_i \overline{u}_j} - \widehat{\overline{u}}_i \widehat{\overline{u}}_j$는 해석영역의 가장 작은 크기가 Reynolds 응력으로 전환되는 것을 나타내는데 이는 SGS 응력과 동질성을 갖기 때문에 가능하다. 그밖에 two-part model[11], Bardina model[12] 등도 제시되었다.

한편 Moeng[4]은 $\tau_{ij}$, $\tau_{\theta i}$을 large scale에 있어서 다음과 같이 나타내었다.

$$\tau_{ij} = -K_m\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) \tag{23}$$

$$\tau_{\theta i} = -K_h \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_i} \tag{24}$$

여기서, $K_m$, $K_h$는 운동과 열의 확산계수이다.

## 2.3. 난류에너지 방정식

SGS(Subgrid scale) 모델을 이용하기 위해서는 모델이 나타내야 하는 물리적인 현상을 이해하여야 하는데 이는 large scale과 small scale사이의 에너지 변화이다. 이 변화는 난류유동에서 속도 및 압력파동을 발생시키고 난류운동량 전달등의 원인이 되는 와류의 운동에 좌우된다. 따라서 이 운동이 유지되기 위해서는 끊임없는 에너지의 공급이 필요하며 이는 평균속도의 에너지로부터 얻게 되는데 이 에너지로부터 에너지가 흡수되어 난류에너지로 공급되고 최종적으로 열에너지로 소산된다.

SGS 난류운동에너지를 $\overline{e}'$ ( $\overline{e}=\overline{u'u'}/2$ )라 하고 N-S 방정식을 정리하면,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{e}}{\partial t} &= -\overline{u_i}\frac{\partial \overline{e}}{\partial x_i} - \overline{u_i' u_j'}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \\ &\quad - \frac{\partial\, \overline{u_i'(e+p'/\rho)}}{\partial x_i} + \frac{g}{\theta_0}(\overline{\theta' w'}) - \varepsilon\end{aligned} \tag{25}$$

가 된다. 우변의 확산항은 downgradient diffusion assumption에 의해

$$\overline{u_i'(e'+p'/\rho_0)} = -2K_m\frac{\partial \overline{e'}}{\partial x_i} \tag{26}$$

로 놓을 수 있고 Kolmogorov 가설에 의해 소산항은

$$\varepsilon = C_k\frac{\overline{e}^{3/2}}{l} \tag{27}$$

과 같다. 여기서,

$$C_k = 0.19 + (0.51 l/\Delta) \tag{28}$$

이고, 길이스케일 $l$은 다음과 같다[4].

$$l=\begin{cases}\triangle & \dfrac{\partial\theta}{\partial z}\le 0 \\ \min\left\{\triangle,\ 0.76\overline{e}'^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{g}{\theta_0}\dfrac{\partial\overline{\theta}}{\partial z}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\} & \dfrac{\partial\theta}{\partial z}>0\end{cases} \tag{29}$$

grid scale은

$$\triangle = (\Delta x\Delta y\Delta z)^{1/3} \tag{30}$$

따라서 식(25)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{e}}{\partial t} =& -\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{u_i}\,\overline{e}) + K_m\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \\ & -\frac{g}{\theta_0}K_h\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(2K_m\left(\frac{\partial \overline{e}}{\partial x_i}\right)\right) \\ & - C_k\frac{\overline{e}^{3/2}}{l}\end{aligned} \tag{31}$$

여기서,

$$K_m = C_a l\,\overline{e}^{1/2}$$

$$K_h = [1+(2l/\triangle)]K_m$$

이며 $C_a$는 상수이다.

# 3. 수치해석

## 3.1. 격자형성 및 수치해석방법

본 모델의 계산격자는 40×40×40이고, 물리영역은 10km×10km×2.4km이고 계산에는 Cartesian 좌표계를 사용하였다. 하나의 격자에서 모든 변수가 동일장소에서 계산되고 저장되는 경우에 반복적인 압력진동이 일어날 수 있으므로 이러한 문제점을 해결하기 위하여, 엇갈린 격자망(staggered grid)을 도입하여 압력의 계산을 안정시키고 경계에서의 압력조건을 간략하게 하였다. Fig. 3은 staggered grid의 일반적 형태를 나타낸 것이다.

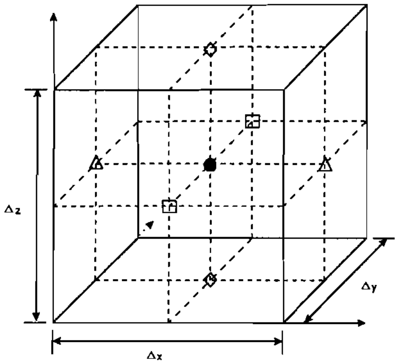



Fig. 3. Generalized 3-Dimension Staggered Grid.

FDM(finite difference method)을 이용하여 편미분방정식의 근사해를 구하였으며 계산은 SIMPLER (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations Revised)방법[13]을 사용하였다. 또한 시간항에 대해서는 전진차분법을, 이류항에 대해서는 풍상차분법을, 그리고 확산항에 대해서는 중심차분법을 사용하였다.

## 3.2. 초기 및 경계조건

무차원화된 연직방향 대류속도와 온도 및 시간에 대한 초기조건은 다음과 같다.

$z < z_{i1} = 0.844 z_{i0}$일 때

$$T = T_0 + 0.1r\left(1 - \frac{z}{z_{i1}}\right)T_{*0} \tag{32}$$

$$w = 0.1r\left(1 - \frac{z}{z_{i1}}\right)w_{*0} \tag{33}$$

$$u = v = 0 \tag{34}$$

$z > z_{i1}$일 때

$$T = T_0 + (z - z_{i1})\Gamma \tag{35}$$

$$u = v = w = 0 \tag{36}$$

여기서, $r$은 -0.5에서 0.5사이의 무작위수(random number)이다.

상부의 수평방향의 속도성분과 각종 scalar량의 시간에 대한 변화량은 0이고 하층에서 연직방향 속도도 0이다. 또한 수평방향 속도성분들은 지표면에 격자점이 존재하지 않으므로 첫 번째 격자점에서의 u와 v 속도성분은 표면마찰속도로부터 계산되었으며 이를 경계조건으로 사용하였다.

측면조건은 유입측 수평속도성분 및 각 scalar의 수평방향 변화율이 0이며 유출측은 다음식과 같다.

$$\phi^m_{bound} = 2\phi^{m-1} - \phi^{m-2} \tag{37}$$

# 4. 결과 및 고찰

## 4.1. Potential Temperature의 연직분포

온위의 연직분포는 대기의 안정성을 판단하는 기초를 이루는 데 온위는 공기의 단열상승과 하강에 무관하게 보존되기 때문이다. Fig. 4는 연직평면상에서 수평평균 온위의 연직분포를 나타낸 것이다. 온도(T)와 온위($\theta$)와의 관계는 다음 식과 같으며

$$\theta = T\left(\frac{P_0}{P}\right)^{R/C_p} \tag{38}$$

여기서, $P_0$는 기준고도의 기압, P는 기온 측정 고도의 기압을 나타내며 R과 $C_P$는 각각 기체상수와 정압비열을 나타내고 $R/C_P = 0.288$이다.

Fig. 4에 나타난 바와 같이 표면에서는 압력차에 의한 대류현상이 활발하므로 온위차가 크게 나타나며 상층부(over $z/z_i = 1$)에서는 온위가 증가하는데, 이는 대기가 안정상태에 있다는 것을 보여주고 있다. 이 결과는 Deardorff[2]의 결과와도 일치하며 실측결과[14]를 잘 모사하였다. 이 결과로

부터 열이 하층으로부터 전달되어 안정층위에서 저장되는 것을 알 수 있다[6].

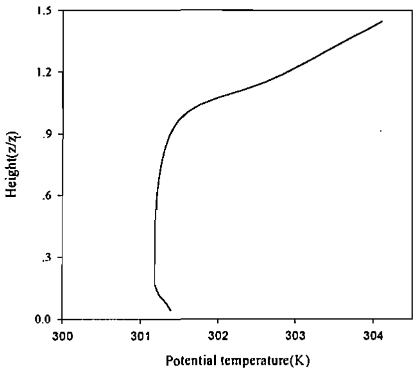



Fig. 4. Vertical profiles of the horizontal mean potential temperature.

## 4.2. 속도분포

Fig. 5는 연직평면상에서 속도의 연직방향 성분 ( $\overline{w}$ )을 나타내고 있다. 이 연직 속도성분은 주로 표면의 열 때문에 생긴 부력의 영향을 많이 받는데, 이 부력상승의 영향때문에 속도성분은 일부지역에서 날카로운 수직상승을 보이고 있다. 반면에 수평방향 속도성분은 혼합층내에서 매우 활발한 혼합이 이루어지는 것을 알 수 있다.

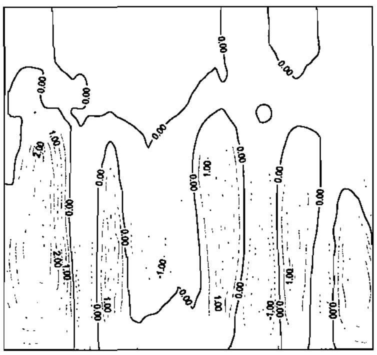
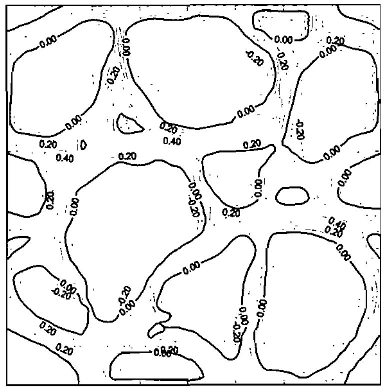
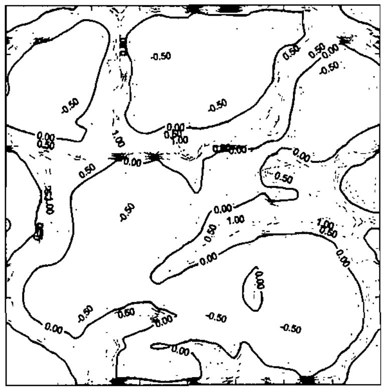


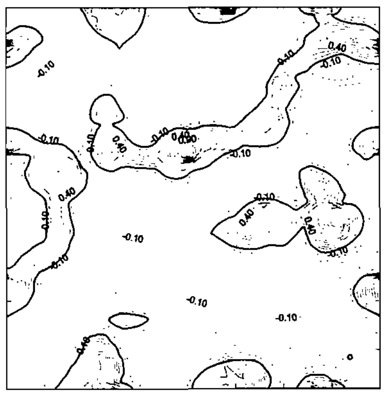
Fig. 5. Contour plot of $\overline{w}$ in a vertical cross sector at $y/z_i = 3.2$. (Contour Line: -1.5, -1.0, -0.5, ⋯, 2.5, 3.0)



(a)



(b)



(c)

Fig. 6. Contour plots of vertical velocity ( $w/w_{*0}$ ) at the normalized height $z = 0.1z_i$, $0.5z_i$, and $1.0\,z_i$. (Solid and dashed line represent positive and negative value, respectively.)

Fig. 6은 무차원 높이 $z=0.1z_i$, $z=0.5z_i$와 $z=1.0z_i$에서의 수평방향 단면의 연직방향 속도 성분을 나타낸 것이다. $z=0.1z_i$인 하층에서의 속도를 보인 (a)에서는 수렴선이 선명하게 나타남을 알 수 있다. $z=0.5z_i$(Fig. 6. (b))에서는 수렴선의 교차점 위로 몇 개의 강한 연직속도 plume이 나타났으며, $z=1.0z_i$(Fig. 6. (c))에서 보는 바와 같이 높이가 증가함에 따라 하향 속도가 발생하는 지역이 넓어지는 반면 연직상향의 속도성분은 좁고 강해짐을 볼 수 있으며, Schmidt & Schumann[6]의 결과와 유사하였다.

하향의 넓은 영역은 연직속도에 대한 확률밀도 함수의 3차 모멘트(skewness)에 의한 결과이며, 이는 plume확산과 매우 밀접한 관계를 가지고 있다.[15]

## 5. 결 론

LES(Large eddy simulation)은 직접계산법과 Reynold 평균 방정식을 이용한 해석법의 중간에 속하는 해석방법으로 여과작업(filtering)과 소격자 모델링(subgrid-scale modeling; SGS modeling)을 통하여 지배방정식이 얻어진다. 따라서 LES에서 난류의 작은 크기는 모델링에 의하여, 큰 크기는 직접 계산된다. 본 연구에서는 몇가지 filter 함수와 SGS 모델을 소개하였으며 LES를 이용하여 계산한 결과를 보였다. 수평방향 평균 온도의 연직분포는 전형적인 대기의 상태를 보여주고 있으며 이는 실측결과 및 Deardorff의 계산과 비슷하였다. 속도분포는 높이가 증가함에 따라 하향 속도가 발생하는 지역이 넓어지는 반면 연직상향의 속도성분은 좁고 강해짐을 볼 수 있었다.

## 참 고 문 헌

1. Gerz, T., Schumann, U., Elghobashi, S.E., "Direct numerical simulation of stratified homogeneous turbulence shear flows", J. Fluid Mech. Vol. 200, 563-594 (1989).
2. Deardorff, J.W., "Three-dimensional numerical study of the height and mean structure of a heated planetary boundary layer", Boundary-Layer Meteorology Vol. 7, 81-106 (1974).
3. Ferziger, J. H., "Large eddy numerical simulations of turbulent flows", AIAA Journal, Vol. 15, No. 9, 1261-1267 (1977).
4. Moeng, C.H., "A large eddy simulation for the study of planetary layer turbulence", J. of the Atmospheric Science Vol. 41, No. 13, 2052-2062 (1984).
5. Mason, P.J., "Large-eddy simulation of the convective atmospheric boundary layer", J. of the Atmospheric Science, Vol. 46, No. 11, 1492-1516 (1989).
6. Schmidt, H., and Schumann, U., "Coherent structure of the convective boundary layer derived from large-eddy simulations", J. Fluid Mech. Vol. 200, 511-562 (1989).
7. Leonard, A., "Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows", Advanced in Geophysics Vol. 18A, 237-248 (1974).
8. Piomelli, U., and Chasnov, J.R., Large-Eddy Simulation: Theory and Application, Turbulence and Transition Modeling, Edited by M. Hallback, D.S. Henningson, A.V. Johanson and P.H.Alfedsson, Kluwer Academic Publishers, 269-336 (1996).
9. Smagorinsky, J., "General circulation experiments with the primitive equations", Monthly

Weather Review, Vol. 91, No. 3, 99-165 (1963).

10. Germano, M., Piomelli, U., Moin, P., and Cabot, W., "A Dynamic subgrid-scale eddy viscosity model", Phys. Fluids A., Vol. 3, 1760-1765 (1991).
11. Schumann, U., "Subgrid scale model for finite difference simulation of turbulent flows in plane channel and annuli", J. Comput. Phys. Vol. 18, 376-404 (1975).
12. Bardina, J., Ferziger, J.H., and Reynolds, W.C., "Improved subgrid-scale models for large eddy simulation", AIAA Paper, No. 80, 1357 (1980).
13. Patankar, S.V., "A calculation proceedure for two-dimensional elliptic situations", Numerical Heat Transfer, Vol. 4, 409-425 (1981).
14. Clarke, R.H., Dyer, A.J., Brook, R.R., Reid, D.G., and Troup, A.J., "The wangara experiment: boundary layer data", CSIRO Div. of Meteorol. Phys. Tech. Paper No. 19, 1-340 (1971).
15. Henn, D.S., and Sykes, R.I., "Large-eddy simulation of dispersion in the convective boundary layer", Atmospheric Environment Vol. 26A, No. 17, 3145-3159 (1992).